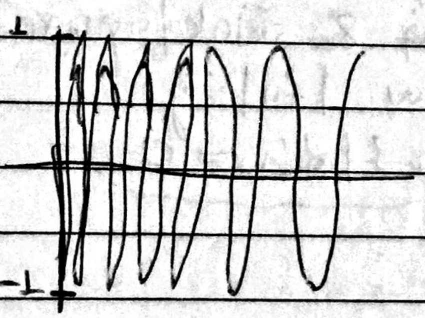
Ορισμός (Ημισυνέχεια)

Έστω X μετρικός χώρος και $f: X \to [-\infty,+\infty]$ η f θα λέγεται άνω ημισυνεχής αν $\forall \beta \in \mathbb{R}$ το σύνολο $[f<\beta]$ είναι ανοιχτό $\Leftrightarrow \forall \beta \in \mathbb{R} : [f \geq \beta]$ κλειστό.

Ορισμός (Ταλάντωση)

Έστω X μετρικός χώρος και $f: X \to \mathbb{R}$ και $x \in X$ η ταλάντωση της f στο σημείο x ορίζεται να είναι τ. και μάλιστα $\tau_f(x) = \inf\{ \operatorname{diam} f(U) : U$ περιοχή του $x \} \geq 0$.

πχ



$f(x) = \eta\mu \frac{1}{x} \to \tau_f(0) = 2$

Έστω $\tau_f : X \to [0,+\infty]$

Παρατηρήσεις

• Η τ_f είναι ημισυνεχής

Απόδ

Έστω $\beta \in \mathbb{R}$

Θδο $[\tau_f < \beta]$ ανοιχτό

Αν $\beta \leq 0 \to [\tau_f < \beta] = \emptyset$ ανοιχτό

Αν $\beta > 0 \to$ έστω $x \in [\tau_f < \beta] \Rightarrow \tau_f(x) < \beta$

Άρα από ορισμό της τ_f υπάρχει μία περιοχή U του x ώστε $\operatorname{diam}(f(U)) < \beta$. Για κάθε $y \in U^\circ \Rightarrow U^\circ$ περιοχή του y με $\operatorname{diam}(f(U^\circ)) \leq \operatorname{diam}(f(U)) < \beta$ και άρα

$U^\circ \subseteq [\tau_f < \beta] \Rightarrow [\tau_f < \beta]$ ανοιχτό
Άρα, τ_f είναι άνω ημισυνεχής

- Η f συνεχής στο x αν.ν $\tau_f(x) = 0$

Απόδειξη
Θεωρώ $\varepsilon > 0$ και αφού f συνεχής στο x
τότε $\exists \delta > 0$ ώστε $\forall y \in X : \rho(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$
Θέτουμε $U = S_\rho(x, \delta)$, $\forall y_1, y_2 \in U : |f(y_1) - f(y_2)| \leq$
$\leq |f(y_1) - f(x)| + |f(x) - f(y_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
Άρα, $\tau_f(x) \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \tau_f(x) = 0$.

Αντίστροφα, Υποθέτουμε ότι $\tau_f(x) = 0$ και θδο η f συνεχής στο x. Έστω $\varepsilon > 0$
$\tau_f(x) = 0 < \varepsilon \Rightarrow \exists\, U$ περιοχή του x ώστε $diam(f(U)) < \varepsilon$
Για κάθε $y \in U$:
$|f(y) - f(x)| \leq diam(f(U)) < \varepsilon \Rightarrow f$ συνεχής στο x.

- $f : X \to \mathbb{R}$ X μ.χ. και έστω $A(f) = \{x \in X : f$ ασυνεχής στο $x\}$
ισοδύναμα $A(f) = \{x \in X : \tau_f(x) > 0\} = [\tau_f > 0] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\tau_n \geq \frac{1}{n}]$
$A(f)$ είναι δηλαδή ένα F_σ σύνολο.

- Εαν $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία του X με $\lim diam(B_n) = 0$ τότε $\tau_f(x) = \lim diam(f(B_n))$

Απόδειξη
Εφόσον η $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \downarrow$ τότε το όριο $\lim diam(f(B_n))$ υπάρχει και άρα $\tau_f(x) \leq \lim diam\, f(B_n)$
Αν ίσχυε η ισότητα $\tau_f(x) = \lim_n diam\, f(B_n)$
τότε $\exists a : \tau_f(x) < a < \lim_n diam\, f(B_n) \Rightarrow \exists U = U(x)$ με $diam(f(U)) < a$. Όμως, εφόσον $\lim_n diam(B_n) = 0$ τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N} : B_{n_0} \subset U$. Έτσι, $diam\, f(B_{n_0}) \leq diam\, f(U) < a$ άτοπο

πχ 1. Έστω $f(x) = \eta\mu \frac{1}{x}$ όταν $x \neq 0$ και $f(x) = 0$, όταν $x = 0$
$\tau_f(0) = 2$

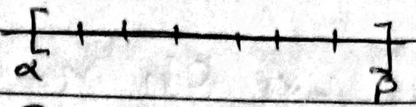
Πχ2

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases} \qquad \tau_f(0)=3$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ Riemann

Έστω $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$ και θεωρώ τις διαμερίσεις δηλ. το σύνολο $\Delta=\{\underset{\alpha}{\overset{\shortparallel}{t_0}}<t_1<\ldots<\underset{\beta}{\overset{\shortparallel}{t_n}}\}$ για το $[\alpha,\beta]$



$\|\Delta\|=\max\{t_i-t_{i-1}: i=1,2,\ldots,n\}$

Εάν Δ & Δ' διαμερίσεις και $\Delta\subset\Delta'$ τότε λέμε ότι η Δ' είναι λεπτότερη της Δ και γράφουμε $\Delta\prec\Delta'$

Έστω $f:[\alpha,\beta]\xrightarrow{\text{φραγμ.}}\mathbb{R}$ και έστω η διαμέριση $\Delta=\{\alpha=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=\beta\}$ του $[\alpha,\beta]$

Ορίζουμε:

$U(f,\Delta)=\sum_{i=1}^{n} M_i(t_i-t_{i-1})\in\mathbb{R}$ (αφού f φραγμ.) άνω άθροισμα της f ως προς Δ

και

$L(f,\Delta)=\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i-t_{i-1})\in\mathbb{R}$ κάτω " " " " "

και $M_i=\sup\{f(t): t\in[t_{i-1},t_i]\}$

$m_i=\inf\{f(t): t\in[t_{i-1},t_i]\}$

Ισχύει: $L(f,\Delta)\leq U(f,\Delta')$ $\forall\ \Delta,\Delta'$ διαμέριση

Επίσης αν $\Delta\prec\Delta'$ για δύο διαμερίσεις τότε

$L(f,\Delta)\leq L(f,\Delta')\leq U(f,\Delta')\leq U(f,\Delta)$.

Ορίζουμε $\underline{\int_\alpha^\beta} f=\sup\{L(f,\Delta): \Delta \text{ διαμέριση στο } [\alpha,\beta]\}$

και επίσης

$$\overline{\int_a^\beta} f = \inf\{ U(f,\Delta) : \Delta \text{ διαμέριση του } [a,\beta]\}$$

το κάτω και άνω ολοκλήρωμα αντίστοιχα

Ισχύει: $\underline{\int_a^\beta} f \leq \overline{\int_a^\beta} f$

Αν τώρα ισχύει ότι $\underline{\int_a^\beta} f = \overline{\int_a^\beta} f = I$

τότε η κοινή τους τιμή I καλείται ολοκλήρωμα από το α έως το β της f. Γράφουμε $I = \int_a^\beta f$ ή $I = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$.

Κριτήριο Riemann

Έστω $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ φραγμένη

f Riemann ολοκληρώσιμη $\Leftrightarrow \begin{cases} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \Delta \text{ διαμ. του } [\alpha,\beta]) \\ \text{ώστε } U(f,\Delta) - L(f,\Delta) < \varepsilon. \end{cases}$

Πχ (Μη ολοκληρώσιμη)

$f = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} : [0,1] \to \mathbb{R}$.

$\underline{\int_0^1} f = 0 \neq 1 = \overline{\int_0^1} f$ όχι Riemann ολοκληρώσιμη

αλλά είναι μετρήσιμη & Lebesgue ολοκληρώσιμη

$$\int_{[0,1]} |f|\,d\lambda \leq \int_{[0,1]} 1\,d\lambda = \lambda[0,1] = 1 < +\infty$$

Επίσης $f = 0$ λ-σπ άρα $\int f\,d\lambda = \int 0\,d\lambda = 0$.

Θεώρημα

Έστω $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ φραγμένη

i) Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη $\Leftrightarrow$ το σύνολο $A(f) = \{x \in [\alpha,\beta] : f \text{ ασυνεχής στο } x\}$ έχει $\lambda(A(f)) = 0$ (δηλ. f συνεχής λ-σπ)

ii) Αν f είναι Riemann ολοκληρώσιμη $\Rightarrow f$ Lebesgue ολοκληρώσιμη και μάλιστα: $\int_\alpha^\beta f = \int_{[\alpha,\beta]} f\,d\lambda$.

Απόδειξη

Έστω $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία διαμερίσεων του $[a,\beta]$ ώστε $\Delta_1 < \Delta_2 < \ldots < \Delta_n < \Delta_{n+1} < \ldots$ και $\|\Delta_n\| \to 0$

$\Delta_n = \{ a = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{k_n}^n = \beta \}$, $\forall n = 1,2,\ldots$

και ορίζουμε

$$\varphi_n = f(a)\cdot \mathcal{X}_{\{a\}} + \sum_{i=1}^{n} m_i^n \mathcal{X}_{(t_{i-1}^n, t_i^n]}$$ και

$$\psi_n = f(a)\cdot \mathcal{X}_{\{a\}} + \sum_{i=1}^{n} M_i^n \cdot \mathcal{X}_{(t_{i-1}^n, t_i^n]}$$

όπου $m_i^n = \inf\{ f(t) : t_{i-1}^n \leq t \leq t_i^n \}$

και $M_i^n = \sup\{ f(t) : t_{i-1}^n \leq t \leq t_i^n \}$

Τότε φ_n, ψ_n μετρήσιμες, απλές

$$\int_{[a,\beta]} \varphi_n \, d\lambda = \sum_{i=1}^{n} m_i^n (t_i^n - t_{i-1}^n) = L(f, \Delta_n)$$

$$\int_{[a,\beta]} \psi_n \, d\lambda = \sum_{i=1}^{n} M_i^n (t_i^n - t_{i-1}^n) = U(f, \Delta_n)$$

και προφανώς $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$, $\forall n$ (1)

$\varphi_n \uparrow$ και $\psi_n \downarrow$ διότι $\Delta_n < \Delta_{n+1}$, $\forall n$

Θέτουμε $\varphi = \sup_n \varphi_n = \lim \varphi_n$

και $\psi = \inf_n \psi_n = \lim \psi_n$ } μετρήσιμες

Μάλιστα δε $\varphi \leq f \leq \psi$ (από την (1))

Αφού f φραγμένη $\Rightarrow \exists M > 0 : |f| \leq M$

Επίσης, $|\varphi_n| \leq M$, $|\psi_n| \leq M$, $\forall n$

άρα από Θεώρημα Κυριαρχημένης σύγκλισης (Lebesgue)

(για $g = M$ σταθερή):

$$\int_{[a,\beta]} \varphi \, d\lambda = \lim_n \int \varphi_n \, d\lambda = L(f, \Delta_n)$$

$$\int_{[a,\beta]} \psi \, d\lambda = \lim_n \int \psi_n \, d\lambda = U(f, \Delta_n)$$

Έτσι μπορούμε να επιλέξουμε τη $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε να ισχύει: $U(f,\Delta_n) - L(f,\Delta_n) < \frac{1}{n}$

$$\int_a^\beta f = \lim_n L(f,\Delta_n) = \lim_n U(f,\Delta_n)$$

Άρα, $\int_a^\beta f = \int_{[a,\beta]} \varphi \, d\lambda = \int_{[a,\beta]} \psi \, d\lambda$

Αφού, $0 \le \psi - \varphi \Rightarrow \int_{[a,\beta]} \psi - \varphi \, d\lambda = 0 \Rightarrow \psi - \varphi = 0$ λ-σπ

$\Rightarrow \psi = \varphi$ λ-σπ.

Αλλά, $\varphi \le f \le \psi \Rightarrow \varphi = f$ και $\psi = f$ λ-σπ

$\Rightarrow f$ Lebesgue μετρήσιμη & ολοκληρώσιμη και το

$$\int_{[a,\beta]} f \, d\lambda = \int_{[a,\beta]} \varphi \, d\lambda = \int_a^\beta f$$

Αφού, $\varphi = \psi$ λ-σπ έχουμε ότι

$$\lambda([\varphi \neq \psi]) = 0 \overset{\text{ισχυρ.}}{\Rightarrow} \lambda(A(f)) = 0$$

2) Αποδείχθηκε στο 1 το $(\Rightarrow)$.

Ασκήσεις (κεφ. 6)

Παρατηρήσεις:

1) Έστω (X, A, μ) χμ

Αν $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ με $f \le g$ μ-σπ τότε

$\int f \, d\mu \le \int g \, d\mu$. (Γενίκευση)

Αποδ.

Θέτω $B := [f > g]$ τότε $\mu(B) = 0$

και $F := f \cdot \chi_{X \setminus B}$ & $G := g \, \chi_{X \setminus B}$

Τότε F, G μετρήσιμες και ανήκουν στο $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$

διότι $|F| \le |f|$ & $|G| \le |g|$

Τότε από την πιο ειδική πρόταση που έχει διατυπωθεί $\int F \, d\mu \le \int G \, d\mu$ διότι $F = f$ μ-σπ $\Rightarrow \int F \, d\mu = \int f \, d\mu$ και $G = g$ μ-σπ $\Rightarrow \int G \, d\mu = \int g \, d\mu$. Άρα $\int f \, d\mu \le \int g \, d\mu$

2) Στο Θεώρημα της Κυριαρχημένης σύγκλισης η υπόθεση $|f_n| \leq g$ μπορεί να αντικατασταθεί με $|f_n| \leq g$ μ-σπ (από την (1))
και η υπόθεση $\lim f_n = f$ μπορεί να αντικατασταθεί από την $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στην f μ-σπ.

Αποδ

$A := \{x \in X : \lim f_n(x) \neq f(x)\}$ μ-μηδενικό

Άρα $\exists B \in \mathcal{A} : A \subseteq B$ με $\mu(B) = 0$

$F_n := f_n \cdot \chi_{X \setminus B}$

$F := f \cdot \chi_{X \setminus B}$ και συνεχίζω όμοια με πριν.

② Να δοθεί παράδειγμα $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όχι Lebesgue μετρήσιμη ώστε $|f|$ ε f^2 να είναι Lebesgue μετρήσιμες

<u>Λύση</u>

Επιλέγουμε ένα A όχι Lebesgue μετρήσιμο ($A \notin \mathcal{M}_{\lambda^*}$ υπάρχει τέτοιο σύνολο διότι $\mathcal{M}_{\lambda^*} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$)

Θέτω $f = \chi_A - \chi_{\mathbb{R} \setminus A}$

όχι Lebesgue μετρήσιμη αφού

$[f > 0] = A \notin \mathcal{M}_{\lambda^*}$

$|f| = f^2 = 1$ είναι Lebesgue μετρήσιμη

<u>Ασκήσεις από βιβλίο</u>

κεφ 5 : 1, 2, 3, 4, 5, 7

κεφ 6 : 1, 6, 8, 9, 10, 13, 17

Ασκήσεις

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ χ.μ.

① Νδο A το σύνολο των σημείων στα οποία μία ακολουθία $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ μετρήσιμες έχει όριο είναι μετρήσιμο

α) Αν $f_n : X \to [-\infty, +\infty]$

β) Αν $f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$.

Λύση

α) $$A := \{x \in X : \liminf f_n(x) = \limsup f_n(x)\}.$$

ή $$A := [\liminf f_n = \limsup f_n] \in \mathcal{A}.$$

διότι $\liminf f_n$ μετρήσιμη

$\limsup f_n$ μετρήσιμη.

β) $f_n := u_n + i v_n$, $Re(f_n) = u_n$, $Im(f_n) = v_n$.

u_n & v_n μετρήσιμες

τότε $$A = [\liminf u_n = \limsup v_n] \cap [\liminf v_n = \limsup v_n] \cap [\liminf u_n \in \mathbb{R}] \cap [\liminf v_n \in \mathbb{R}]$$

τομή μετρήσιμων συνόλων άρα $A \in \mathcal{A}$.